

Απειροστικός Λογισμός Ι, 11 Σεπτεμβρίου 2025

Θέμα 1. [4 μον.] Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΗ (παρουσιάζοντας την απόδειξή της) ή ως ΛΑΘΟΣ (δίνοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα).

(Α) Αν η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

(Β) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο ξ και είναι παραγωγίσιμη στο ξ , τότε $f'(\xi) = 0$.

(Γ) Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο ξ .

(Δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και ισχύει $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Θέμα 2. [1 μον.] Να υπολογίσετε το supremum, το infimum, το μέγιστο στοιχείο και το ελάχιστο στοιχείο (για όσα από τα παραπάνω υπάρχουν) του συνόλου.

$$D = \left\{ \cos\left(\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Σημείωση: Θεωρήστε δεδομένες όσες ιδιότητες τις συνάρτησης $\cos$ του συνημιτόνου γνωρίζετε (δεν απαιτείται δηλαδή απόδειξη για τις ιδιότητες του συνημιτόνου).

Θέμα 3. [2 μον.] Α) Πότε μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον αριθμό a (να αναφέρετε τον ορισμό). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό, να δείξετε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τύπο

$$a_n = 4 + \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt[7]{n}}$$

συγκλίνει στον αριθμό 4.

Β) Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν) των παρακάτω ακολουθιών.

$$x_n = \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n^2}{(n+2)!} + \cdots + \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n}$$

Θέμα 4. [2 μον.] Για μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $f(0) = 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi) \geq f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Θέμα 5. [2 μον.] Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2(3 + \sin x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια και ως προς την παραγωγισιμότητα.

Καλή επιτυχία!